CV DOMA 13/10/14 2

DŮKAZ INDUKCÍ A SPOREM

- MINIMÁLNÍ PROTIPŘÍKLAD

PRINCIP SUDOSTI

$$G=(V,E)$$

V .... KONEČNÁ MNOŽINA (VRCHOLY)

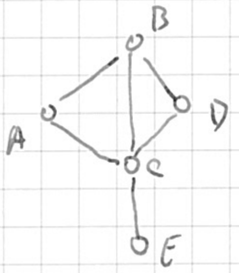
E .... HRANY $\quad E \subseteq \binom{V}{2}$

$$E \subseteq V \times V \setminus (\emptyset \cup V)$$

$$E = \{\{x,y\} \mid x,y \in V,\ x \neq y\}$$

$\deg_G V = |E|$ $\quad \boxed{\sum_{v \in V} \deg_G v \text{ JE SUDÁ}}$

PŘÍKLAD:



$$V=\{A,B,C,D,E\}$$

$$E=\{\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\},\{C,E\}\}$$

- NECHŤ G JE MINIMÁLNÍ PROTIPŘÍKLAD

TO ZNAMENÁ ŽE COKOLIV MENŠÍHO SPLŇUJE TVRZENÍ

$G=(V,E)$ $\quad E \neq \emptyset \Rightarrow \exists e \in E$

$$e=\{u,v\}$$

$\{u,v\}$ se započítá jako

$+1$ v $\deg v$

$+1$ v $\deg u$ $\quad$ SPOR

PŘÍKLAD:

$$F_n \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

DŮKAZ: NECHŤ n JE NEJMENŠÍ TAKOVÉ, ŽE

$$F_n > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$F_n = \underbrace{F_{n-1} + F_{n-2}}_{\text{PLATÍ}}$$

$$F_{n-1} \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

$$F_{n-2} \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3}$$

SEČTU ROVNICE

$$F_n \le \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{n-3} \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

TEDY:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} < F_n \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3} \left(\frac{3+\cancel{3}\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$6+2\sqrt{5} < 6+2\sqrt{5}$$

SPOR

BINÁRNÍ RELACE $R \subseteq X \times X$

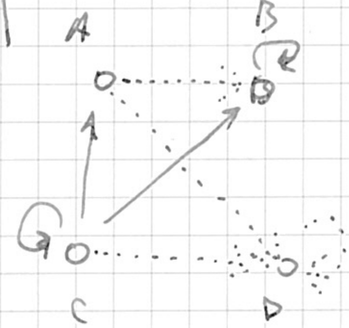
- PODMNOŽINA KARTÉZSKÉHO SOUČINU
  - REFLEXIVNÍ $(x,x) \in R \ \forall x \in X$?
  - SYMETRICKÁ
  - ANTI~~R~~-SYMETRICKÁ
  - TRANZITIVNÍ

R NA X

$R^n = R \circ R^{n-1}$

$R^1 = R$

$R \circ S = \{(x,z) ; \exists y ; (x,y) \in R, (y,z) \in S\}$



S ——

R ......

$R \circ S = \{(A,B)\}$

$S \circ R = \{(C,B),(C,D)\}$

1) JAKÝ JE # VŠECH / REFLEXIVNÍCH RELACÍ NA ~~M~~ n PRVKOVÉ MNOŽINĚ.

2) BUĎ R ~~ANTIREF~~ ANTI-SYMETRICKÁ, POTOM $\overline{R} \subseteq R$ JE ATISYMETRICKÁ.

3) KOLIK JE NA 4 PRVKOVÉ MNOŽINĚ TRANZITIVNÍCH RELACÍ?

4) BUĎ R, S SYMETRICKÉ RELACE. JSOU NÁSLEDUJÍCÍ SYMETRICKÉ? $R \cup S$, $R \setminus S$, $R \cap S$, $R \underset{\text{SYM. DIFERENCE}}{\triangle} S$, $R \circ S$, R

5) BUĎ X KONEČNÁ MNOŽINA A $R \subseteq X \times X$ RELACE;

$$\exists\, m, n \in \mathbb{N} \text{ RŮZNÁ TAKŽE } R^m = R^n$$

~~1) REFLEXIVNÍ: n~~

~~REFLEXIVNÍ + SYMETR.: n^2~~

~~SYMETRICKÝ: $n^2 - n$~~

~~TRANZITIVNÍ: $\frac{n^2 - n}{2}$~~

~~ANTISYMETRICKÁ (SLABÁ): $\frac{n^2 - n}{2}$~~

~~ANTISYMETRICKÁ (SILNÁ): $\frac{n^2}{2}$~~

KOLIK EXISTUJE RŮZNÝCH ~~RELACÍ~~ 0,1-MATIC $n \times n$

$\boxed{\text{VŠECH } 2^{n^2}}$

$$\begin{array}{c|ccc} & & n & \\ \hline n & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}$$

$\forall x : (x, x)\, R$

$\boxed{\text{REFLEXIVNÍCH } 2^{n^2 - n}}$

(2) R JE ANTISYMETRICKÁ $(x, y) \in R \Rightarrow x = y$

$\overline{R} \subseteq R$ CHCI: R JE ANTISYM

↯ $\overline{R}$ NENÍ ANTISYMETRICKÁ TO JEST

$(x, y) \in \overline{R}$ & $(y, x) \in \overline{R} \Rightarrow (x, y) \in R, (y, x) \in R$

$\boxed{R \triangle S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R) = XOR}$