DMA DOUČOVÁNÍ 24/11/14 (1)

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{\substack{I \subseteq \{A_1 \dots A_n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{A_k \in I} A_k\right|$$

$$\bar{S}(n) = \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \dots \pm \frac{n!}{n!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!}$$

$\bar{S}$ - POČET PERMUTACÍ S ALESPOŇ 1 PEVNÝM BODEM

$$|A_i| = (n-i)! \binom{n}{i} = \frac{(n-i)!\, n!}{(n-i)!\, i!} = \frac{n!}{i!}$$

$(n-i)!$ — PERMUTACE; $\binom{n}{i}$ — ZOBRAZÍ SE SAMI NA SEBE

$$P(A) = \frac{n! - \bar{S}(n)}{n!} = 1 - \frac{\bar{S}(n)}{n!} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!}}{n!} =$$

$$= \boxed{1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}} \longrightarrow 1 - \frac{1}{e}$$

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

DMA DOUČOVÁNÍ 24/11/14 ②

ČÁSTEČNÉ USPOŘÁDÁNÍ

$\leq$ REFLEXIVNÍ, TRANZITIVNÍ, ANTISYMETRICKÁ

~~REFLEXI~~

$\forall a, b, c \in \leq$: $a \leq a$

$a \leq b \wedge b < c \Rightarrow a \leq c$

$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$

$(\mathbb{R}, \leq)$

$(\mathbb{N}, <)$

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ $\quad O, N, M \in \mathcal{P}(X)$

$M \subseteq M$

$M \subseteq N \wedge N \subseteq O \Rightarrow M \subseteq O$

$M \subseteq N \wedge N \subseteq M \Rightarrow M = N$

$([10], |)$ $\quad n | n$

$m | n \wedge n | o \Rightarrow m | o$

$m \cdot k_1 = n$ $\quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}$

$n \cdot k_2 = o$

$\Downarrow$ $\quad m \cdot k_1 k_2 = n k_2 = o$

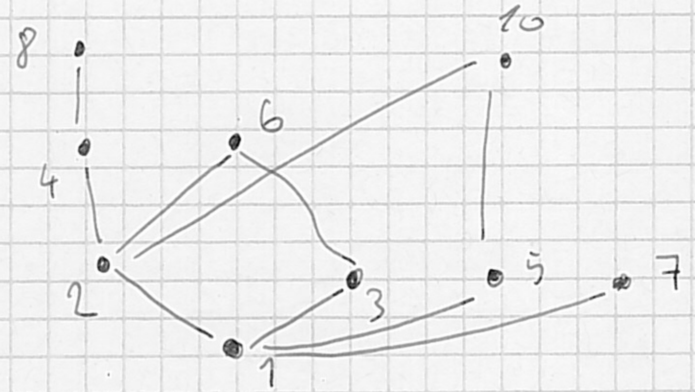
$m \cdot k_3 = o$ $\quad m(k_1 k_2) = o$

$\quad \underbrace{k_1 k_2}_{k_3}$

DMA DOUČOVÁNÍ 24/III 1

HASSŮV DIAGRAM

$([10], |)$



1 - $\{1\}$

2 - $\{1, 2\}$

6 - $\{1, 2, 3, 6\}$

KE KAŽDÉMU ČÁST. USP $(X, \leq)$ $\exists$ $(Y, \subseteq)$ K

$Y \subseteq P(X)$ A BIJEKCE

$\downarrow : X \to Y$ ŽE $x \leq y \iff \downarrow x \subset \downarrow y$

$\downarrow x = \{y : y \leq x\}$

Př: $\downarrow 10 = \{1, 5, 2, 10\}$

$Y = \{\downarrow x, x \in X\}$

DOKAZUJEME ŽE $\downarrow$ JE BIJEKCE

DŮKAZ ~~SPOREM~~ PŘÍMO

$x \neq y$ $\quad x \leq y \Rightarrow x \in \downarrow$

$y \in \downarrow y$

$x \neq y \iff \downarrow x \neq \downarrow y$

$\Rightarrow$ PROSTÁ (NA KON. MN.)

$\Rightarrow$ BIJEKTIVNÍ

V: $a \in \downarrow x$

$a \leq x$

$a \leq y$

$a \in \downarrow y$

$\downarrow x \subseteq \downarrow y$

$x \in \downarrow x$

$x \in \downarrow y$

$x \leq y$ $\square$

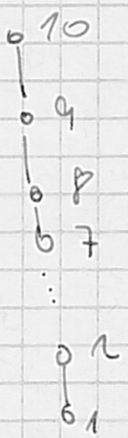
LINEÁRNÍ USPOŘÁDÁNÍ

JE ČU $(X, \leq)$ KDE

$a, b \in X$: $a \leq b \vee b \leq a$

PŘ:

$([10], \leq)$



MINIMÁLNÍ ~~MAXIM~~ PRVEK

$a \in X : \forall b \leq a \Rightarrow a = b$

MAXIMÁLNÍ PRVEK

$a \in X : \forall b \geq a \Rightarrow a = b$

ŽÁDNÝ PRVEK NENÍ VĚTŠÍ / MENŠÍ NEŽ a

NEJNIŽŠÍ PRVEK (VÍCE NEŽ MINIMÁLNÍ)

$a \in X : \forall b \in X : b \geq a$

NEJVYŠŠÍ PRVEK (VÍCE NEŽ MAXIMÁLNÍ)

$a \in X : \forall b \in X : b \geq a$

POKUD MÁ MNOŽINA NEJNIŽŠÍ PRVEK TAK POUZE JEDENKRÁT A JE TO I JEDINÝ MINIMÁLNÍ PRVEK.

$(X, \leq)$ MÁ NEJVYŠŠÍ PRVEK $\Leftrightarrow$ MÁ JEDEN MAXIMÁLNÍ PRVEK

VĚTA: ČÁSTEČNÉ USPOŘÁDÁNÍ SE MŮŽE DO ZŠÍŘIT NA LINEÁRNÍ

DŮKAZ: INDUKCÍ

$(X, \leq)$ PODLE $|X|$

$|X| = 1$ ✓

$|X| - 1 \rightarrow |X|$

$\exists\, a \in X$: MIN. PRVEK

$X \setminus \{a\}$ PLATÍ I.P.

$b \geq a$

$c \parallel a \xrightarrow{\text{DOPLNÍME VZTAH}} c \geq a$

$\square$

DMA POUČOVÁNÍ 24/11/14

<u>ŘETĚZEC</u> POSLOUPNOST PRVKŮ $x_1 \dots x_n$ KTERÉ JSOU NAVZÁJEM POROVNATELNÉ $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

<u>ANTIŘETĚZEC</u> MNOŽINA NAVZÁJEM NEPOROVNATELNÝCH PRVKŮ $\{x_{1 \dots n};\ x_j \parallel x_i\}$

<u>VĚTA O DLOUHÉM A ŠIROKÉM</u>

$\omega(X,\leq)$ - NEJDELŠÍ ŘETĚZEC

$\alpha(X,\leq)$ - —"— ANTIŘETĚZEC

$$|X| \leq \omega(X,\leq) \cdot \alpha(X,\leq)$$

<u>DŮKAZ:</u> INDUKCÍ PODLE ~~...~~ $\omega(X,\leq)$

1. ~~...~~ $\omega(X,\leq) = 1$

$\alpha(X,\leq) = |X|$

$|X| \leq \omega(X,\leq)|X|$

2. $A = \{$MINIMÁLNÍ PRVKY $X\}$

$\alpha(X,\leq) \geq A$

$\omega(X \setminus A,\leq) = \omega(X,\leq) - 1$

1. $\alpha(X,\leq) \geq A$
2. $\omega(X \setminus A) = \omega(X$
3. $\alpha(X \setminus A,\leq) \leq \alpha$

I.P.

$|X| = |A| + |X \setminus A|$

$|X| = \alpha(X,\leq) + \omega(X \setminus A,\leq) \cdot \alpha(X \setminus A,\leq)$

$= \alpha(X,\leq) + (\omega(X,\leq) - 1) \cdot \alpha(X \setminus A,\leq) \leq$

$\leq \alpha(X,\leq) + \omega(X,\leq) \cdot \alpha(X,\leq)$

PRAVDĚPODOBNOST

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ PROSTOR

(Ω, P) Ω .... MNOŽINA ELEMENTÁRNÍCH JEVŮ

KOSTKA $\Omega = [6]$

NAROZENINY $|\Omega| = 365^{50}$ 50 LIDÍ, 365 DNÍ

P .... ZOBRAZENÍ Z MNOŽINY JEVŮ DO INTERVALU $\langle 0, 1 \rangle$

$P(\emptyset) = 0$

$P(\Omega) = 1$

JEV $(A, B, \ldots)$

$A \subset \Omega$ PODMNOŽINA EL. JEVŮ

PŘÍKLAD

KOSTKA : A.. PADNE ČÍSLO VĚTŠÍ NEŽ 2

$A = \{3, 4, 5, 6\}$ $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$

$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

B... PADNE LICHÉ ČÍSLO

$B = \{1, 3, 5\}$

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

DRUHÁ DOUČOVÁNÍ 24/11/24

MINCE: 5 MINCÍ PANNA/OREL

$|\Omega| = 2^5$ (VARIACE S OPAKOVÁNÍM)

$\omega = (1,0,0,1,0)$

PRAVDĚPODOBNOST JEVU A ZA B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

př: LICHÉ, $m > 2$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

A JE NEZÁVISLÝ NA B. $P(A) = P(A|B)$

BAYERSŮV VZOREC

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

JEVY $A_{1 \dots n}$ JSOU NEZÁVISLÉ POKUD PLATÍ ŽE KAŽDÉ 2 JEVY JSOU NEZÁVISLÉ:

$$P(A_{1 \dots n}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)$$

DRUHÁ DOUČOVÁNÍ 24/11/14 10

NÁHODNÁ VELIČINA

JE ZOBRAZENÍ $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

STŘEDNÍ HODNOTA (NÁHODNÉ VELIČINY) NA KONEČNÉ MNOŽINĚ

$$E(f) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot f(\omega)$$

$$E(f+g) = E(f) + F(g)$$

INDIKÁTOR

INDIKÁTOR JEVU A SE ZNAČÍ I_A A JE TO NÁHODNÁ VELIČINA O KTERÉ PLATÍ

$$I_A = \begin{cases} \omega \in A: 1 \\ \omega \notin A: 0 \end{cases}$$

$$E(I_A) = P(A).$$

ODVOZENÍ

$$E(I_A) = \sum P(\omega) \cdot I_A(\omega) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = P(A)$$