DŮKAZ SPOREM

ZALOŽEN NA EKVIVALENCI $(V \Rightarrow W) \Leftrightarrow (\neg W \Rightarrow \neg V)$

MATEMATICKÁ INDUKCE

- CÍL: DOKAZAT ŽE NĚJAKÉ PŘIROZENÉ ČÍSLO
  - (i) DOKÁŽE ŽE VÝROK PLATÍ $V(1)$
  - (ii) — " — IMPLIKUJE $V(i) \Rightarrow V(i+1)$

DOKAŽTE: $3 \mid n^3 - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

① PŘÍMO... ZAPÍŠEME $n = 3k + a \quad a \in \{0, 1, 2\}$

$$n^3 - n = (3k+a)^3 - (3k+a) = (3k)^3 + (3k)^2 a + 3(3k)a^2 +$$

$$+ a^3 - 3k - a = 3(\ldots) + a^3 - a$$

(2) SPOREM:

$\exists n \quad 3 \nmid n^3 - n$

ZAPÍŠEME: (STEJNĚ JAKO (1))

$n = 3k + a$

A ZJISTÍME $3 \nmid a^3 - a$ PRO VŠECHNY VOLBY a COŽ JE SPOR

(3) PRO NEJMENŠÍ PROTIPŘÍKLAD ... NECHŤ JE n

$3 \nmid n^3 - n \qquad n^3 - n = (n-1)n(n+1)$

$\vdots$

$3 \nmid n'(n'-1)(n'-2)$ ... $n' = n-1$

(4) INDUKCÍ

RELACE NA MNOŽINÁCH

ZNAČENÍ: (a, b) ... USPOŘÁDANÁ DVOJICE

- RŮZNÁ OD $\{a, b\}$

DEFINICE: BINÁRNÍ RELACE MEZI MNOŽINAMI X A Y JE LIBOVOLNÁ PODMNOŽINA KARTÉZSKÉHO SOUČINU $X \times Y$ KDE $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$

BINÁRNÍ RELACE NA X JE PODMNOŽINOU $X \times X$

ZNAČENÍ RELACÍ

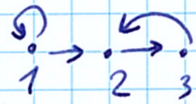
$R \subseteq X \times Y$

$(x, y) \in R$ SE ČASTO ZAPISUJE $x R y$

ZNÁZORŇUJEME RELACI

- VÝČTEM PRVKŮ: $R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,2)\}$

- ŠIPEK: $x R y \dots x \to y$



(GRAF)

- MATICE:

$x \backslash y$	1	2	3
1	1	1	0
2	0	0	1
3	0	1	0

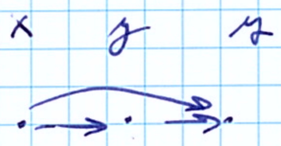
DEFINUJEME

ŘEKNEME ŽE RELACE R NA X JE - REFLEXIVNÍ
POKUD PLATÍ $\forall x \in X: x R x$

- SYMETRICKÁ POKUD PLATÍ $\forall x, y \in X: x R y \to y R x$

- ANTISYMETRICKÁ POKUD PLATÍ $\forall x, y \in X: (x R y) \wedge (y R x) \Rightarrow x = y$

- TRANZITIVNÍ PRO $\forall x, y, z \in X: (x R y) \wedge (y R z) \Rightarrow x R z$



DEF: <u>EKVIVALENCE</u> JE RELACE NA NĚJAKÉ MNOŽINĚ KTERÁ JE <u>REFLEXNÍ</u>, <u>SYMETRICKÁ</u> A <u>TRANZITIVNÍ</u>

JE-LI R EKVIVALENCE NA X PAK <u>TŘÍDA EKVIVALENCE</u> URČENÁ $x \in X$ JE $R[x] = \{y \in R : xR$

~~PŘÍPAD~~

PŘÍKLAD EKVIVALENCE:

- ROVNOST $(=)$
- ROVNOBĚŽNOST (NA MNOŽINĚ PŘÍMEK V ROVINĚ, ROVIN V PROSTORU)

TVRZENÍ: JE-LI R EKVIVALENCE NA X PAK

(i) $\forall x \in X: \ R[x] \neq \emptyset$

(ii) $\forall x, y \in X: \ (R[x] \cap R[y] \neq \emptyset) \vee (R[x] = R[y])$

(iii) TŘÍDY EKVIVALENCE TVOŘÍ ROZKLAD X A JEDNOZNAČNĚ URČUJÍ R