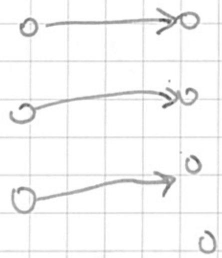
FUNKCE (ZOBRAZENÍ)

- RELACE TAKOVÁ, ŽE wRy, wRx } $x \neq y$

PROSTÁ



NA

TVRZENÍ

\# FUNKCÍ $f : [n] \to [m]$ = " SLOVO DÉLKY n Z m PRVKOVÉ ABECEDY "

ÚKOL: DŮKAZ MI

DŮKAZ:

$f(1), \dots, f(n)$

1) $n = 1$

$f(\{1\}) \to [m]$

POČET JE m

2) $n-1 \to n$

PŘEDPOKLAD: $f : [n-1] \to [m]$ .... m^{n-1}

POČET FCÍ JE $m^{n-1} \cdot m = m^{n}$

DEF:

PERMUTACE NA KONEČNÉ MNOŽINĚ

JE BIJEKCE $\pi: X \to X$.

PŘÍKLAD

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\pi(1) = 3, \ \pi(2) = 5, \ \pi(3) = 4, \ \pi(4) = 1, \ \pi(5) = 2$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (3\ 4\ 1)(2\ 5)$$

VZORY

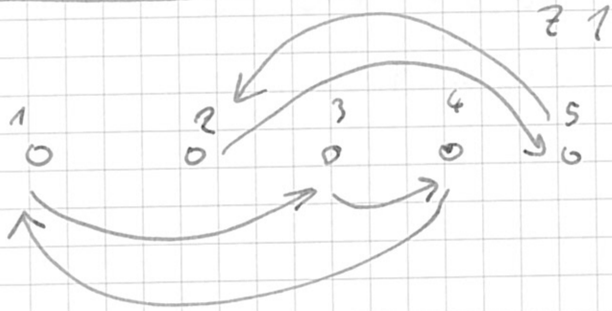
OBRAZY

$$\Updownarrow$$

$$(1\ 3\ 4)(2\ 5)$$

Z $1 \to 3$, $3 \to 4$, $4 \to 1$ A $2 \to 5$, $5 \to 2$

ŠIPKOVÝ GRAF



TVRZENÍ: ŠIPKOVÝ GRAF PERMUTACE NA KONEČNÉ MNOŽINĚ SE SKLÁDÁ Z DISJUNKTNÍCH (ORIENTOVANÝCH) CYKLŮ.

TVRZENÍ: POČET PERMUTACÍ NA n PRVKOVÉ MNOŽINĚ JE $\underline{n!} = \prod_{k=1}^{n} k$

$$0! = 1$$

DEFINICE: BINOMICKÝ KOEFICIENT

JE KOMBINAČNÍ ČÍSLO $\binom{n}{k}$ JE PRO $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ A JE ROVNO $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

ZNAČENÍ: $k, n \in \mathbb{Z}$, $k \notin \{0, 1, \dots n\}$

$$\binom{n}{k} = 0$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

TVRZENÍ: POČET k-PRVKOVÝCH PODMNOŽIN Z n-PRVKOVÉ MNOŽINY JE $\binom{n}{k}$

DŮKAZ:

$$= \frac{\#\ k\text{-tic z } n\text{-prvkové množ.}}{\#\ \text{uspořádání } k\text{-tic}} =$$

$$= \frac{\#\ \text{prostých } \cancel{\text{fce}}\ f\,[k] \to [n]}{\#\ \text{permutací na } k\text{-prvkové mn.}}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \square$$

DŮSLEDEK:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

X JE KONEČNÁ MNOŽINA

$k \in \mathbb{N}_0 \quad k \leq |X|: \binom{X}{k} = \{ Y \subseteq X, |Y| = k \}$

$$\left| \binom{X}{k} \right| = \binom{|X|}{k}$$

POZOROVÁNÍ

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \ldots \text{ SYMETRIE}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad \ldots \text{ SOUČTOVÝ VZOREC}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

PASCALŮV TROJÚHELNÍK

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

BINOMICKÁ VĚTA

VĚTA: BINOMICKÁ VĚTA

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

PRO $n \in \mathbb{N}_0$ A x LIBOVOLNOU PROMĚNNOU

DŮKAZ:

$$(1+x)^n = \underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{n}$$

KOEFICIENT U x^k JE $\binom{n}{k}$ $\square$

DŮKAZ: INDUKCÍ PODLE n

① $n = 1$ $(1+x)^1 = 1+x$

$$\binom{1}{0} x^0 + \binom{1}{1} x^1 = 1+x \quad \checkmark$$

② $n-1 \Rightarrow n$

INDUKČNÍ PŘEDPOKLAD

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} = (1+x)\left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot x^k\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k + \sum_{l=1}^{n} \binom{n-1}{l-1} x^l =$$

DUAL 17/10/14 (6)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} x^k - \binom{n-1}{n} x^n + \sum_{l=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^l -$$

$$- \binom{n-1}{0-1} x^0 = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n+1}{k} \right] x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad \square$$

BINOMICKÁ VĚTA PRO x, y

x, y ... PROMĚNÉ

$$(x+y)^n = x^n \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \quad ; \frac{y}{x} =: z$$

$$x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{y^k}{x^k} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x^{n-k}}$$

VĚTA: MULTIBINOMICKÁ VĚTA

BUĎ $n \in \mathbb{N}_0$ A $x_1, \dots x_n$ - PROMĚNNÉ

POTOM $(x_1 + x_2 + \dots x_n)^n = \cancel{\sum_{k_1, k_2 \dots k_n \in \mathbb{N}_0}^{n} \binom{n}{k_1, k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots}$

$$= \sum_{k_1, k_2 \dots k_n \in \mathbb{N}_0}^{n} \binom{n}{k_1, k_2, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

KDE $\binom{n}{k_1 \dots k_n} = \frac{n!}{k_1! \dots k_n!}$

PRINCIP INKLUZE A EXKLUZE

VĚTA: NECHŤ $A_1, \dots A_n$ JSOU KONEČNÉ MNOŽINY POTOM

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

$$- |A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = \sum_{X = P([n]),\ X \neq 0} (-1)^{|X|+1} \left|\bigcap_{i \in X} A_i\right|$$

$$1 = \binom{k}{0} = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} \binom{k}{l}$$