DMA 31/10/14 ①

REPREZENTACE ČÁST. USPOŘÁDÁNÍ

TVRZENÍ: KE KAŽDÉMU ČÁS. USPOŘ. $(X, \leq)$ EXISTUJE USPOŘÁDÁNÍ $(Y, \subseteq)$ KDE $Y \subseteq P(X)$ A BIJEKCE $\downarrow: X \to Y$ TAKOVÁ, ŽE $x \leq y \Leftrightarrow \downarrow x \subseteq \downarrow y$

DŮKAZ: V KAPITOLÁCH

DŮSLEDEK: KAŽDÉ ČÁST. USPOŘÁDÁNÍ LZE VNOŘIT ~~VLOŽIT~~ DO $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$

DEFINICE: NEJMENŠÍ PRVEK USPOŘÁDÁNÍ $(X, \leq)$ JE $a \in X$ PRO KTERÉ PLATÍ: $\forall b \in X: b \geq a$

MINIMÁLNÍ PRVEK USPOŘÁDÁNÍ $(X, \leq)$ A JE $a \in X$ PRO KTERÉ PLATÍ: $\forall b \in X:$

$$b \leq a \Rightarrow b = a$$

PŘÍKLAD: $(\mathbb{N}, \leq)$ ... 1 – NEJMENŠÍ, MINIMÁLNÍ

$([10], |)$ ——— II ———

– OBDOBNĚ DEFINUJEME NEJVĚTŠÍ A MAXIMÁLNÍ PRVEK

DMA 31/10/14

$([10], |)$ ... NEMÁ NEJVĚTŠÍ PRVEK

$[6, 10]$ JSOU MAX. PRVKY.

JE-LI a NEJMENŠÍ PRVEK POTOM JE i JEDINÝ MINIMÁLNÍ PRVEK.

JE-LI $(X, \leq)$ KONEČNÉ ČÁST. USPOŘÁDÁNÍ POTOM MÁ ALESPOŇ JEDEN MINIMÁLNÍ PRVEK.

RŮZNÉ MINIMÁLNÍ PRVKY JSOU NEPOROVNATELNÉ... ZNAČÍME $a \| b$ $a \not\leq b$

TVRZENÍ: KAŽDÉ KONEČNÉ ČÁSTEČNÉ USPOŘÁDÁNÍ LZE ROZŠÍŘIT NA ÚPLNÉ (LINEÁRNÍ) USPOŘÁDÁNÍ.

DŮKAZ: INDUKCÍ PODLE $|X|$

① $|X| = 1$ ✓

② ZVOLME $\cancel{a \in X}$ $a \in X$ MINIMÁLNÍ PRVEK
- POUŽIJEME INDUKČNÍ PŘEDPOKLAD NA X BEZ a $(X \setminus \{a\}, \leq)$ A ROZŠÍŘÍME HO NA LINEÁRNÍ
- VRÁTÍME a DO USPOŘÁDÁNÍ JAKO NEJMENŠÍ PRVEK ... $\cancel{b} \| a$ ... $a \leq b$

PŘÍKLAD:

$([10], |)$ ROZŠÍŘÍME NA:

$1 \leq 5 \leq 2 \leq 10 \leq 3 \leq 9 \leq 4 \leq 7 \leq$
$\leq 8 \leq 6$

DEFINICE: ŘETĚZEC v $(X, \leq)$ JE POSLOUPNOST
PRVKŮ $x_1 < x_2 < \dots < x_k$

ANTIŘETĚZEC v $(X, \leq)$ JE MNOŽINA
$\{x_1, \dots x_\ell\}$ KDE $\forall i, j : x_i \| x_j \dots$

NEZÁVISLÁ MNOŽINA

ZNAČENÍ: $\omega(X, \leq) \dots$ DÉLKA NEJDELŠÍHO
ŘETĚZCE (PRO KONEČNÉ ~~MNO~~ USPOŘÁDÁNÍ)

$\alpha(X, \leq) \dots$ JE VELIKOST NEJVĚTŠÍHO
ANTIŘETĚZCE

$\omega([10], |) = 4$

$\alpha([10], |) = 5 \quad \{4, 6, 9, 5, 7\}$

VĚTA: (O DLOUHÉM A ŠIROKÉM)

PRO KAŽDÉ $(X, \leq)$ PLATÍ:

$$|X| \leq \omega(X, \leq) \cdot \alpha(X, \leq)$$

DŮKAZ: INDUKCÍ PODLE $\omega(X, \leq)$

① $\omega(X, \leq)$ ... NEMÁ RŮZNÉ POROVNATELNÉ

DVOJCE $\alpha(X, \leq) = |X|$ ✓

② ZVOLÍME $A = \{$MINIMÁLNÍCH PRVKŮ $v (X, \leq)\}$ ...

A JE NEZÁVISLÁ $\Rightarrow |A| \leq \alpha(X, \leq)$

$$\omega(X \setminus A, \leq) = \omega(X, \leq) - 1$$

$$|X| = |A| + |X \setminus A|$$

$$|X| \leq \alpha(X, \leq) + \omega(X, \leq) \cdot \alpha(\overset{X \setminus A}{\cancel{X}}, \leq)$$

$$|X| \leq \alpha(X, \leq)\, \omega(X, \leq)$$

□

ZÁKLADY POČTU PRAVDĚPODOBNOSTI

DEF: KONEČNÝ PRAVD. PROSTOR JE KONEČNÁ MNOŽINA ELEMENTÁRNÍCH JEVŮ Ω A FCE

$P : \mathcal{P}(\Omega) \to \langle 0,1 \rangle$ SPLŇUJE

$P(\emptyset) = 0$ ... NEMOŽNÝ JEV

$P(\Omega) = 1$ ... JISTÝ JEV

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

MNOŽINA $A \subseteq \Omega$ SE NAZÝVÁ JEV A $P(A)$ JE PRAVDĚPODOBNOST JEVU A

PŘÍKLAD (KOSTKA)

$\Omega = 6 \quad P(A) = \dfrac{|A|}{6}$ $\quad A$ JE JEV

DMA 31/10/14 1

REPREZENTACE ČÁST. USPOŘÁDÁNÍ

TVRZENÍ: KE KAŽDÉMU ČÁS. USPOŘ. $(X, \leq)$ EXISTUJE USPOŘÁDÁNÍ $(Y, \subseteq)$ KDE $Y \subseteq P(X)$ A BIJEKCE $\downarrow : X \to Y$ TAKOVÁ, ŽE $x \leq y \iff \downarrow x \subseteq \downarrow y$

DŮKAZ: V KAPITOLÁCH

DŮSLEDEK: KAŽDÉ ČÁST. USPOŘÁDÁNÍ LZE VNOŘIT ~~VLOŽIT~~ DO $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$

DEFINICE: NEJMENŠÍ PRVEK USPOŘÁDÁNÍ $(X, \leq)$ JE $a \in X$ PRO KAŽDÉ PLATÍ: $\forall b \in X : b \geq a$

MINIMÁLNÍ PRVEK USPOŘÁDÁNÍ $(X, \leq)$ A JE $a \in X$ PRO KAŽDÉ PLATÍ: $\forall b \in X$:
$b \leq a \Rightarrow b = a$

PŘÍKLAD: $(\mathbb{N}, \leq)_{\dots}$ 1 – NEJMENŠÍ, MINIMÁLNÍ

$([10], |)$ ——— " ———

– OBDOBNĚ DEFINUJEME NEJVĚTŠÍ A MAXIMÁLNÍ PRVEK

DMA

31/10/14

$([10], |)$ ... NEMÁ NEJVĚTŠÍ PRVEK

$[6, 10]$ JSOU MAX. PRVKY.

JE-LI a NEJMENŠÍ PRVEK POTOM JE 1 JEDINÝ MINIMÁLNÍ PRVEK.

JE-LI $(X, \leq)$ KONEČNÉ ČÁST. USPOŘÁDÁNÍ POTOM MÁ ALESPOŇ JEDEN MINIMÁLNÍ PRVEK.

RŮZNÉ MINIMÁLNÍ PRVKY JSOU NEPOROVNATELNÉ ... ZNAČÍME $a \parallel b$ $a \nleq b$

<u>TVRZENÍ</u>: KAŽDÉ KONEČNÉ ČÁSTEČNÉ USPOŘÁDÁNÍ LZE ROZŠÍŘIT NA ÚPLNÉ (LINEÁRNÍ) USPOŘÁDÁNÍ.

<u>DŮKAZ</u>: INDUKCÍ PODLE $|X|$

① $|X| = 1$ ✓

② ZVOLME ~~$a \in X$~~ $a \in X$ MINIMÁLNÍ PRVEK

- POUŽIJEME INDUKČNÍ PŘEDPOKLAD NA X BEZ a $(X \setminus \{a\}, \leq)$ A ROZŠÍŘÍME HO NA LINEÁRNÍ
- VRÁTÍME a DO USPOŘÁDÁNÍ JAKO NEJMENŠÍ PRVEK ... $b \parallel a$. $a \leq b$

PŘÍKLAD:

$([10], |)$ ROZŠÍŘÍME NA:

$$1 \leq 5 \leq 2 \leq 10 \leq 3 \leq 9 \leq 4 \leq 7 \leq$$
$$\leq 8 \leq 6$$

DEFINICE: ŘETĚZEC v $(X, \leq)$ JE POSLOUPNOST PRVKŮ $x_1 < x_2 < \dots < x_k$

ANTIŘETĚZEC v $(X, \leq)$ JE MNOŽINA $\{x_1, \dots x_l\}$ KDE $\forall i,j : x_i \| x_j \dots$

NEZÁVISLÁ MNOŽINA

ZNAČENÍ: $\omega(X, \leq)$ ... DÉLKA NEJDELŠÍHO ŘETĚZCE (PRO KONEČNÉ ~~mno~~ USPOŘÁDÁNÍ)

$\alpha(X, \leq)$ ... JE VELIKOST NEJVĚTŠÍHO ANTIŘETĚZCE

$$\omega([10], |) = 4$$

$$\alpha([10], |) = \cancel{4}\ 5 \qquad \{4, 6, 9, 5, 7\}$$

VĚTA: (O DLOUHÉM A ŠIROKÉM)

PRO KAŽDÉ $(X,\le)$ PLATÍ:

$$|X| \le \omega(X,\le)\cdot\alpha(X,\le)$$

DŮKAZ: INDUKCÍ PODLE $\omega(X,\le)$

① $\omega(X,\le)$ ... NEMÁ RŮZNÉ POROVNATELNÉ

DVOJE $\alpha(X,\le)=|X|$ ✓

② ZVOLÍME $A = \{$MINIMÁLNÍCH PRVKŮ V $(X,\le)\}$ ...

A JE NEZÁVISLÁ $\Rightarrow |A| \le \alpha(X,\le)$

$$\omega(X\setminus A,\le) = \omega(X,\le)-1$$

$$|X| = |A| + |X\setminus A|$$

$$|X| \le \alpha(X,\le) + \omega(X,\le)\cdot\alpha(\overset{X\setminus A}{\cancel{X}},\le)$$

$$|X| \le \alpha(X,\le)\,\omega(X,\le)$$

$\square$

DMA 31/10/14 (5)

ZÁKLADY POČTU PRAVDEPODOBNOSTI

DEF: KONEČNÝ PRAVD. PROSTOR JE KONEČNÁ MNOŽINA ELEMENTÁRNÍCH JEVŮ Ω A FCE

$P: \mathcal{P}(\Omega) \to \langle 0, 1 \rangle$ SPLŇUJE

$P(\emptyset) = 0$ ... NEMOŽNÝ JEV

$P(\Omega) = 1$ ... JISTÝ JEV

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

MNOŽINA $A \subseteq \Omega$ SE NAZÝVÁ JEV

A $P(A)$ JE PRAVDEPODOBNOST JEVU A.

PŘÍKLAD (KOSTKA)

$\Omega = 6 \quad P(A) = \frac{|A|}{6}$ $\quad A$ JE JEV