

REPREZENTACE ČÁST. USPOŘÁDÁNÍ

Tvrzení: ke každému část. uspor. $(X, \leq)$

existuje uspořádaní $(Y, \subseteq)$ kde

$Y \subseteq P(X)$ a bijekce $\downarrow: X \rightarrow Y$ taková,

$$\text{že } x \leq y \Leftrightarrow \downarrow x \subseteq \downarrow y$$

Důkaz: v kapitolech

Důsledek: každé část. uspořádaní lze
vnést
vložit do $(P(N), \subseteq)$

Definice: nejmenší prvek uspořádaní $(X, \leq)$

je $a \in X$ pro které platí: $\forall b \in X: b \geq a$

minimální prvek uspořádaní $(X, \leq)$

je $a \in X$ pro které platí: $\forall b \in X:$

$$b \leq a \Rightarrow b = a$$

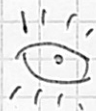
Příklad: $(\mathbb{N}, \leq)$ je nejmenší, minimální

$$([10], 1)$$

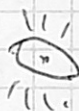
— 11 —

— obdobně definujeme největší a
maximální prvek

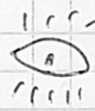
$([10], 1)$... NEMA' NEJMENŠÍ PRVEK
 $[6, 10]$ JSOU MAX. PRVKY.



JE-LI w NEJMENŠÍ PRVEK POTOM JE I
 JEDINÝ MINIMÁLNÍ PRVEK.



JE-LI $(X, \leq)$ KONEČNÍ ČÁSTI, USPORÁDÁNÍ
 POTOM MÁ ALESPOL JEDEN MINIMÁLNÍ
 PRVEK.



RŮZNÉ MINIMÁLNÍ PRVKY JSOU NEPOROV-
 NATELNÉ. ZACHŮ $a \parallel b$ $a \not\leq b$

TVRZENÍ: KAŽDÉ KONEČNÉ ČÁSTIČNÉ USPORÁDÁNÍ
 LZE ROZŠÍRIT NA ÚPLNÉ (LINEÁRNÍ)
 USPORÁDÁNÍ.

DŮKAZ: INDUKCÍ PODLE $|X|$

① $|X| = 1$ ✓

② ZVOLME ~~$a \in X$~~ $a \in X$ MINIMÁLNÍ PRVEK

- POUŽIJEME INDUKČNÍ PŘEDPOKLAD NA X BEZ

a $(X \setminus \{a\}, \leq)$ A ROZŠÍŘÍME TO NA
 LINEÁRNÍ

- VRÁTÍME a DO USPORÁDÁNÍ JAKO NEJMENŠÍ
 PRVEK. $\forall a \quad a \leq x$

PRÍKLAD :

$([10], 1)$ rozšíríme na:

$$\underline{1} \leq \underline{5} \leq 2 \leq 10 \leq 3 \leq 9 \leq 4 \leq 7 \leq \underline{8} \leq \underline{6}$$

DEFINICE: RETEZEC v $(X, \leq)$ je posoupnost

$$\text{prvků } x_1 < x_2 < \dots < x_k$$

Antiretezec v $(X, \leq)$ je množina

$$\{x_1, \dots, x_k\} \text{ kde } \forall i, j: x_i \parallel x_j, \dots$$

nezavislá množina

Značení: $w(X, \leq)$... velikost nejdelšího
řetězce (pro konečné ~~ma~~ uspořádání)

$\lambda(X, \leq)$... je velikost nej většího
Antiretezce

$$w([10], 1) = 4$$

$$\lambda([10], 1) = 5 \quad \{4, 6, 9, 5, 7\}$$

VEĽTA: (o dĺžke a šírke)

PRO KAŽDÉ $(X, \leq)$ PLATÍ:

$$|X| \leq c(X, \leq) \cdot d(X, \leq)$$

DŮKAZ: INDUKCÍ PODLE $c(X, \leq)$

① $c(X, \leq) \dots$ nemá různých porovnávaných

DVOJE $d(X, \leq) = |X| \checkmark$

② zvolíme $A = \{ \text{minimální prvky v } (X, \leq) \} \dots$

$$A \text{ je nezávislá} \Rightarrow |A| \leq d(X, \leq)$$

$$c(X \setminus A, \leq) = c(X, \leq) - 1$$

$$|X| = |A| + |X \setminus A|$$

$$|X| \leq d(X, \leq) + c(X, \leq) \cdot d(X \setminus A, \leq)$$

$$|X| \leq d(X, \leq) c(X, \leq)$$



ZÁKLADY POČTU PRAUDĚRODNOSTI

DEF: Konečný pravd. prostor je konečná
 množina elementů ku je Ω a pce

$P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow (0, 1)$ splňuje

$P(\emptyset) = 0$... nemožný je

$P(\Omega) = 1$... jistý je

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Množina $A \subseteq \Omega$ se nazývá je

a $P(A)$ je pravděpodobnost je A .

PŘÍKLAD (KOSTKA)

$\Omega = 6$ $P(A) = \frac{|A|}{6}$ A je je

REPREZENTACE ČÁST. USPOŘÁDÁNÍ

Tvrzení: ke každému část. uspor. $(X, \leq)$

existuje uspořádaní $(Y, \subseteq)$ kde

$Y \subseteq P(X)$ a bijekce $\downarrow: X \rightarrow Y$ taková,

$$\text{že } x \leq y \Leftrightarrow \downarrow x \subseteq \downarrow y$$

Důkaz: v kapitolech

Důsledek: každé část. uspořádaní lze
vnést
vložit do $(P(N), \subseteq)$

Definice: nejmenší prvek uspořádaní $(X, \leq)$

je $a \in X$ pro které platí: $\forall b \in X: b \geq a$

minimální prvek uspořádaní $(X, \leq)$

je $a \in X$ pro které platí: $\forall b \in X:$

$$b \leq a \Rightarrow b = a$$

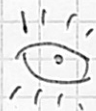
Příklad: $(\mathbb{N}, \leq)$ je nejmenší, minimální

$$([10], 1)$$

— 11 —

— obdobně definujeme největší a
maximální prvek

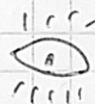
$([10], 1)$ NEMA' NEJMENŠÍ PRVEK
 $[6, 10]$ JSOU MAX. PRVKY.



JE-LI w NEJMENŠÍ PRVEK POTOM JE I
 JEDINÝ MINIMÁLNÍ PRVEK.



JE-LI $(X, \leq)$ KONEČNÍ ČÁSTI, USPORÁDÁNÍ
 POTOM MÁ ALESPOL JEDEN MINIMÁLNÍ
 PRVEK.



RŮZNÉ MINIMÁLNÍ PRVKY JSOU NEPOROV-
 NATELNÉ. ZACHŮ $a \parallel b$ $a \not\leq b$

TVRZENÍ: KAŽDÉ KONEČNÉ ČÁSTIČNÉ USPORÁDÁNÍ
 LZE ROZŠÍRIT NA ÚPLNÉ (LINEÁRNÍ)
 USPORÁDÁNÍ.

DŮKAZ: INDUKCÍ PODLE $|X|$

① $|X| = 1$ ✓

② ZVOLME ~~$a \in X$~~ $a \in X$ MINIMÁLNÍ PRVEK

- POUŽIJEME INDUKČNÍ PŘEDPOKLAD NA X BEZ

a $(X \setminus \{a\}, \leq)$ A ROZŠÍŘÍME HO NA

LINEÁRNÍ

- VRÁTÍME a DO USPORÁDÁNÍ JAKO NEJMENŠÍ
 PRVEK. $\forall a \parallel b \quad a \leq b$

Příklad :

$([10], 1)$ rozšíříme na:

$$\underline{1} \leq \underline{5} \leq 2 \leq 10 \leq 3 \leq 9 \leq 4 \leq 7 \leq \underline{8} \leq \underline{6}$$

Definice: Retězec v $(X, \leq)$ je posloupnost

$$\text{prvků } x_1 < x_2 < \dots < x_k$$

Antiretce v $(X, \leq)$ je množina

$$\{x_1, \dots, x_k\} \text{ kde } \forall i, j: x_i \not\leq x_j \dots$$

nezavislá množina

Značení: $w(X, \leq) \dots$ délka nejdelšího
retce (pro konečné ~~mo~~ uspořádání)

$\lambda(X, \leq) \dots$ je velikost nej většího
Antiretce

$$w([10], 1) = 4$$

$$\lambda([10], 1) = 5 \quad \{4, 6, 9, 5, 7\}$$

VEĽA: (o dĺžke a šírke)

PRO KAŽDÉ $(X, \leq)$ PLATÍ:

$$|X| \leq c(X, \leq) \cdot d(X, \leq)$$

DŮKAZ: INDUKCÍ PODLE $c(X, \leq)$

① $c(X, \leq) \dots$ nemá různých porovnávaných

DVOJE $d(X, \leq) = |X| \checkmark$

② zvolíme $A = \{ \text{minimálních prvků v } (X, \leq) \} \dots$

$$A \text{ je nezávislá} \Rightarrow |A| \leq d(X, \leq)$$

$$c(X \setminus A, \leq) = c(X, \leq) - 1$$

$$|X| = |A| + |X \setminus A|$$

$$|X| \leq d(X, \leq) + c(X, \leq) \cdot d(X \setminus A, \leq)$$

$$|X| \leq d(X, \leq) c(X, \leq)$$

□

ZÁKLADY POČTU PRAUDĚRODNOSTI

DEF: Konečný pravd. prostor je konečná množina elementů Ω a $P \in$

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow (0, 1) \text{ splňuje}$$

$$P(\emptyset) = 0 \dots \text{nemůže být}$$

$$P(\Omega) = 1 \dots \text{jistě je}$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Množina $A \subseteq \Omega$ se nazývá jev

a $P(A)$ je pravděpodobnost jevu A .

PŘÍKLAD (KOSTKA)

$$\Omega = 6 \quad P(A) = \frac{|A|}{6} \quad A \text{ je jev}$$