ÚPRAVY SLR KTERÉ NEMĚNÍ MN. ŘEŠENÍ

1) VYNÁSOBENÍ JEDNÉ ROVNICE ČÍSLEM λ, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) PŘIČTENÍ JEDNÉ ROVNICE KE DRUHÉ

TVRZENÍ: OPERACE 1, 2 NEMĚNÍ MNOŽINU ŘEŠENÍ

DŮKAZ: MÁME SLR $R_1, \dots R_m$

OPERACE 1: PŘEJDEME K SOUSTAVĚ $SLR' = \lambda \cdot R_1, R_2, \dots R$

TVRDÍM: PRO $\forall x, y, \dots \in \mathbb{R}$ R_1 PLATÍ $\Leftrightarrow$ λR_1 PLATÍ

OSTATNÍ ROVNICE JSOU STEJNÉ TUDÍŽ

$x, y \dots$ ŘEŠÍ SLR = ŘEŠÍ SLR'

OPERACE 2: $SLR' = R_1, R_2 + R_1, \dots R_m$

TVRDÍM: $\forall x, y \dots$ $SLR \Leftrightarrow SLR'$

POKUD PLATÍ SLR, TEDY I R_1, R_2 TAK

PLATÍ: $R_1 + R_2 \Rightarrow SLR'$ PLATÍ

POKUD ~~PLATÍ~~ SLR', TAK PLATÍ R_1 A $R_2 + R_1$

TAKŽE PLATÍ $R_2 + R_1 - R_1$ TEDY R_2.

TUDÍŽ PLATÍ SLR

$\square$

3) PROHOZENÍ I-TÉ A J-TÉ ROVNICE.

DCV - LZE VYŘEŠIT OPERACEMI 1, 2

4) PŘIČTENÍ NÁSOBKU JEDNÉ RCE K JINÉ.

$R_j \rightarrow R_j + \lambda \cdot R_1$

DEFINICE: OPERACE ~~1-4~~ (1-2) SE NAZÍVAJÍ **ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY**.

GAUSOVA ELIMINACE

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x \cancel{+} 2y + 6z &= 6 \\ y - z &= 0 \end{aligned} \quad \lambda = -1 \qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ 0x - 3y + 6z &= 3 \\ y - z &= 0 \end{aligned} \quad \lambda = 3 \qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ 3z &= 3 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 3 & &\Rightarrow x = 2 \\ y - z &= 0 & &\Rightarrow y = 1 \\ 3z &= 3 & &\Rightarrow z = 1 \end{aligned}$$

ZPĚTNÁ SUBSTITUCE

PIVOT

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \; -1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) +3\times \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ & 0 & 3 & \\ 0 & 1 & -1 & \end{array}\right)$$

2 PIVOT

3 PIVOT

HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ MATICE

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ & 1 & -1 & 0 \\ & & 3 & 3 \end{array}\right)$$

DEF: ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY

$Ax = b$ JE MATICE $A|b$

- ERÚ (ELEM. ŘÁDK. ÚPRAVY) JDE DĚLAT NA SLR I NA ROZŠÍŘENOU MATICI SOUSTAVY.

DEF: ŘÁDKOVĚ ODSTUPŇOVANÝ TVAR (REF)

EN: ROW ECHELON FORM

$$
A = \begin{array}{cccccc}
 & j(1) & j(2) & & j(3) & \\
0 & \bullet & ? & ? & ? & ? \\
0 & 0 & \bullet & ? & ? & ? \\
0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & ? \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

r – HODNOST MATICE, $\cancel{m}\ n$

$\bullet \neq 0$ PIVOTY

$r \leq \cancel{m}\ n$

~~BAS~~ BASICKÝ SLOUPEC

1) řádky $1 \ldots r$ JSOU NULOVÉ

2) —‖— $r+1 \ldots \cancel{m}\ n$ JSOU NULOVÉ

3) $j(i) = \min\{j : a_{ij} \neq 0\}$ i - ŘÁDEK, j - SLOUPEC

$j(1) < j(2) < \cdots < j(r)$

PIVOTY JSOU NA POZICÍCH $a_{i,j(i)}$

r = HODNOST MATICE

BASICKÉ SLOUPCE - SLOUPCE S PIVOTY

LA 10/10/14 (4)

HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ MATICE

TVRZENÍ: MĚJME SOUSTAVU LIN. RCÍ $Ax = b$, A JE V REF.

1) $\exists k > r : b_k \neq 0$ ... PAK SLR NEMÁ ŘEŠENÍ

DŮKAZ: K-TÁ RCE JE $0x_1 + \dots + 0x_n = b_k \neq 0$

2) $\forall k > r : b_k = 0$

- JE-LI j-TÝ SLOUPEK NEBÁZICKÝ (BEZ PIVOTU)

... $x_j \in \mathbb{R}$ LIBOVOLNÉ

ZPĚTNÁ SUBSTITUCE

- JE-LI $j = j(i)$ ... SPOČTEME x_j Z i-TÉ RCE ... TOTO DĚLÁM PRO $i = r, r-1, \dots, 1$

POZNÁMKA: ~~k r = m n~~

$r = n \Rightarrow$ JEDN. ŘEŠENÍ RCE

JAK PŘEVÉST LIB. MATICI NA REF - GAUSSOVO ELIM

$i = 1,\ j = 1$

DO:

NAJDI PIVOT $a_{k,l} \neq 0$; $k \geq i$, $l \geq j$

KDYŽ NENÍ, KONEC, MÁME REF

KDYŽ JE $j = l$:

PROHOĎ ŘÁDKY i A k

VYNULUJ PRVKY $a_{>i;j}$ (ODEČTENÍM VHODNÉHO NÁSOBKU i TÉHO ŘÁDK

$i = i + 1$; $j = j + 1$