MATICE

PŘIPOMENUTÍ

VEKTORY .... $\in \mathbb{R}^n$, ZAPISUJEME SLOUPCOVĚ $\left.\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}\right\} n$

OPERACE PO SLOŽKÁCH

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1) $x = y \iff \forall i: x_i = \cancel{x} y_i$

2) $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + \cancel{x} y_1 \\ \vdots \\ x_n + \cancel{x} y_n \end{pmatrix}$ $\quad (x+y)_i = x_i + y_i$ PRO i

3) $c \in \mathbb{R}$ ... $cx = \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix} = (cx)_i = c \cdot x_i$

DEFINICE: MATICE $m \times n$ JE TABULKA S m ŘÁDKY A n SLOUPKY. PRO MATICI A ZNAČÍME PRVEK V ~~INTERVALU~~ i-TÉM ŘÁDKU A j-TÉM SLOUPKU. PÍŠEME

$$A = (a_{ij})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

OPERACE (PO SLOŽKÁCH) $\forall i, j$:

1) $A = B \iff A_{ij} = B_{ij}$

2) $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

3) $(cA)_{ij} = c \cdot A_{ij}$

TRANSPONOVANÁ MATICE $A = A^T$

DEFINICE: JE $A^T = (a_{ji})_{j=1}^{n}{}_{i=1}^{m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

POZOROVÁNÍ: $(A^T)^T = A$

DEFINICE: A JE SYMETRICKÁ MATICE POKUD $A = A^T$
$(A \in \mathbb{R}^{n \times n})$

JEDNOTKOVÁ MATICE $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

DIAGONÁLNÍ MATICE

DEF: POKUD $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ A $a_{ij} = 0$ POKUD $i \neq j$

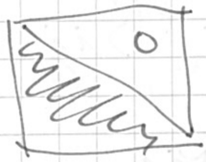
$$\begin{pmatrix} ? & & 0 \\ & ? & \\ 0 & & ? \end{pmatrix}$$

HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ

DEF: POKUD $A_{ij} = 0 \ \forall i > j$

DOLNÍ

$A_{ij} = 0 \ \forall i < j$



CA 16/10/14 (3)

NÁSOBENÍ MATIC

DEF: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

SOUČIN MATIC $A \circ B$ JE DEFINOVÁN

$$\boxed{(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}}$$

$$A \circ B \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

TRVÁ $O(n^3)$

JDE TO I $O(n^{2,7\ldots})$

$O(n^{2,3\ldots})$

DEF: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A_{i*} = (A_{1*}, \ldots, A_{n*})$$

$$B_{*j} = \begin{pmatrix} B_{*1} \\ \vdots \\ B_{*n} \end{pmatrix}$$

POZN:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj} = A_{i*} \cdot B_{*j} \ldots \in \mathbb{R}^1$$

POZN: PEVNÉ j

$$\cancel{(AB)_{*j} =} (AB)_{*j} = \sum_{k=1}^{n} A_{*k} \cdot B_{kj}$$

OBDOBNĚ PRO PEVNÉ i

POZN.

$$AB = \sum_{k=1}^{n} A_{*k} \cdot B_{k*}$$

<u>TVRZENÍ:</u> $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A \cdot I_n = I_m A = A$$

<u>DŮKAZ:</u> $A I_n = A$:

$\forall i = 1, 2, \dots m$

$\forall j = 1, 2, 3, \dots n$: $A_{ij} = (A I_n)_{ij} = A_{i1} \cdot I_{1j} + A_{i2} I_{2j} + \dots + A_{in} I_{nj} = A_{ij} I_{jj} = A_{ij}$

<u>TVRZENÍ:</u> $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

<u>DŮKAZ:</u> $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$B^T \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} \cdot B_{ki} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (A^T)_{kj} (B^T)_{ik} = (B^T \cdot A^T)_{ij}$$

TVRZENÍ: $A(B+C) = AB + AC$

$$(B+C)A = BA + CA$$

DŮKAZ: NA CVIČENÍ

VĚTA: $(AB)C = A(BC)$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$

DŮKAZ:

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k}^{n}\left(\sum_{l}^{n} A_{il} B_{lk}\right) \cdot C_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} A_{il} B_{lk} C_{kj} = \sum_{l=1}^{n} A_{il} \sum_{k=1}^{n} B_{lk} C_{kj}$$

~~(BC)~~