ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY

1) VYNÁSOBENÍ i-TÉHO ŘÁDKU c; $c \neq 0$:

Z A DOSTANU A'

$$A' = \left(I + (c-1)E(i,i)\right)(A)$$

$$M = I + (c-1)E(i,i) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & c & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A'_{rs} = \sum_{k=1}^{n} M_{rk} A_{ks} = M_{rr} A_{rs}$$

M_{rr}: c pro $r = i$, 1 jinak

2) PŘIČTENÍ j-TÉHO ŘÁDKU K i-TÉMU.

$(j = 1, i = 2)$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} (A)$$

$$\| $$

$$I + E(i,j)$$

3) PROHOZENÍ ŘÁDKŮ …. NAPŘ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) PŘIČTENÍ $c \cdot j$-TÉHO ŘÁDKU …. $I + cE(i,j)$

PŘÍKLAD

$$A \xrightarrow{R_1 := 2R_1} A_1 \xrightarrow{R_2 := R_1 + R_2} A_2 \xrightarrow{R_3 = R_1/2} A_3$$

$$A_1 = B_1 A \quad \dots \quad B_1 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = B_2 A_1 \quad \dots\dots \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = B_3 A_2 \quad \dots\dots \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 B_2 B_3 = ?$$

POZOROVÁNÍ

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "\text{ERÚ}"] & A' \arrow[l, bend left, "\text{POSL. ERÚ}"] \end{tikzcd}$$

VĚTA: (O ERÚ)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, P posloupnost ERÚ, $A \to A'$

1) $\exists B, C \in \mathbb{R}^{m \times m}: A' = BA, \; A = CA'$

2) aplikací P na I dostaneme B

DŮKAZ:

1B) $P: A = A_0 \to A_1 \to A_2 \to \dots \to A' = A_k$

tak že $\forall i: A_{i+1}$ vznikne z A_i za pomoci ERÚ.

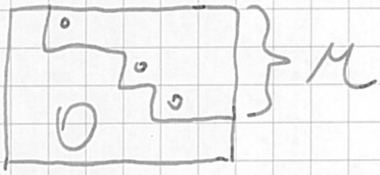
$A_{i+1} = B_i A_i$ tudíž $A' = A_k = (B_k B_{k-1} \dots B_0) A$

2) APLIKACÍ P ... ! VZNIKNE POSLOUPNOST $B_0, B_1 \ldots B$

1c) $A \xrightarrow{\text{POSL. ERÚ}} A'$

JINÁ POSLOUPNOST ERÚ, POUŽIJ 1B

PŘIPOMENUTÍ REF TVAR



$\circ :=$ PIVOT $\neq 0$

RREF TVAR

- REDUCED REF
  - SPECIÁLNÍ PŘÍPAD REF.
  - KAŽDÝ PIVOT = 1
  - KAŽDÝ SLOUPEC S PIVOTEM MÁ JEN JEDNU JEDNIČKU.

LIBOVOLNÁ MATICE $\xrightarrow{\text{GAUS.}}$ REF $\longrightarrow$ RREF

1) VYNÁSOBÍM KAŽDÝ ŘÁDEK SPRÁVNOU KONST.

2) FOR i in RANGE(1, n):
   OD R_i ODEČTU VHODNÝ ŘÁDEK.

= GAUS-JORDAN ELIMINACE

V "OBECNÉM" PŘÍPADĚ $R^{n \times m}$

$Ax = b \longrightarrow$  $\cdot x = b' \longrightarrow$ $\cdot\, x = b''$

REF

RREF

LA 23/10/14

DEFINICE:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

MATICE $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE INVERZNÍ K A

POKUD $AB = I_n$ ZNAČÍME $B = A^{-1}$

TVRZENÍ $AB = I_n$ & $CA = I_n \Rightarrow B = C$

DŮKAZ $(CA)B = C(AB)$

$$\begin{array}{ccc} (CA)B & = & C(AB) \\ \| & & \| \\ I \cdot B & & C I \\ \| & & \| \\ B & & C \end{array}$$

DŮSLEDEK: POKUD EXISTUJE PRAVÁ, LEVÁ INVERZ
$\Rightarrow$ VŠECHNY PRAVÉ I LEVÉ INV. MATICE JSOU STEJNÉ

MOHLO BY SE STÁT: $\exists B, \nexists C$

DEFINICE: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE REGULÁRNÍ POKUD

$A x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \; (x \in \mathbb{R}^n)$ MÁ JEDNO ŘEŠENÍ

$x = \vec{0}$

(JINAK JE A SINGULÁRNÍ)

VĚTA: (O REGULÁRNÍCH MATICÍCH)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

PNTJE ... PAK NÁSL. TVRZ. JSOU EKVIVALENTNÍ:

1) $\forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = \vec{0} \Rightarrow x = \vec{0}$

2) $\forall b \in \mathbb{R}^n : Ax = b$

3) $\forall A'$ ... REF TVAR A ... A' MÁ n PIVOTŮ

4) A JDE POSL. ERÚ PŘEVÉST NA $I = RREF(A)$

5) $\exists B \in \mathbb{R}^{n \times n} : AB = I_n$ (PRAVÁ INV. MAT.)

6) $\exists C \in \mathbb{R}^{n \times n} : CA = I_n$ (LEVÁ -II-)

DŮKAZ

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, Rightarrow] & 3 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dl, phantom] & 2 \arrow[d, Rightarrow, bend left] \\
6 \arrow[u, Rightarrow] & 4 \arrow[l, Rightarrow] \arrow[ul, Rightarrow] & 5 \arrow[u, Rightarrow, bend left]
\end{tikzcd}$$