MA1 9/10/14

RACIONÁLNÍ ČÍSLA $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} ; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

FORMÁLNÍ DEFINICE

$$\mathbb{Q} = \left\{ (a,b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} / \sim \quad (a,b) \sim (c,d)$$

$ad = bc$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .... $z \in \mathbb{Z}$ .... $(z,1) = \frac{z}{1} \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ .... TĚLESO

? $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$?

VĚTA: $\forall x \in \mathbb{Q} : x^2 \neq 2$

~~DŮKAZ:~~

DŮKAZ SPOREM ... výrok A

$$((\neg A \Rightarrow B) \,\&\, (\neg B)) \Rightarrow A$$

$\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$

NAPÍŠEME $x = \frac{p}{q}$ V ZÁKLADNÍM TVARU (p, q JSOU NESOUDĚLNÁ)

$$x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$$

$p^2 = 2q^2$ ... p JE DĚLITELNÉ 2

$p = 2r ; r \in \mathbb{Z}$

$4r^2 = q^2$

$2r^2 = q^2$ ... q JE DĚLITELNÉ

SPOR

MAX, MIN, SUP, INF

NECHŤ X JE MNOŽINA A NECHŤ $<$ JE LINEÁRNÍ USPOŘÁDÁNÍ 1) $\forall x, y \in X$: NASTÁVÁ PRÁVĚ JEDNA Z MOŽNOSTÍ $x < y;\ x = y;\ x > y$

2) $\forall x, y, z \in X: (x < y) \,\&\, (y < z) \Rightarrow x < z$

PŘÍKLAD: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \dots$ $<$ LINEÁRNÍ USPOŘÁDÁNÍ

DEFINICE: NECHŤ $T \subset X$ KDE $(X, <)$ JE LINEÁRNÍ USPOŘÁDÁNÍ

- a JE NEJVĚTŠÍ PRVEK T, $a \in T$ JE MAXIMUM, $a = \max T$ – POKUD PRO KAŽDÉ $x \in T: x \leq a$
- $a \in T$ JE MINIMUM, $a = \min T$ – POKUD PRO KAŽDÉ $x \in T: x \geq a$

POKUD $\max T$ NEBO $\min T$ EXISTUJE TAK JE URČEN JEDNOZNAČNĚ

PŘÍKLAD: 1) $(X, <) \dots (\mathbb{Q}, <) \dots$ $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$

2) $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\} = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$

DOMÁCÍ ÚKOL

HORNÍ MEZ

DEF: HORNÍ MEZ $T \subset X$ JE LIBOVOLNÉ $m \in X$ TAKOVÉ, ŽE $m \geq a$ PRO VŠECHNA $a \in T$

DOLNÍ MEZ

DEF: DOLNÍ MEZ $T \subset X$ JE LIBOVOLNÉ $m \in X$ TAKOVÉ, ŽE $m \leq a$ PRO VŠECHNA $a \in T$

SUPREMUM, INFIMUM

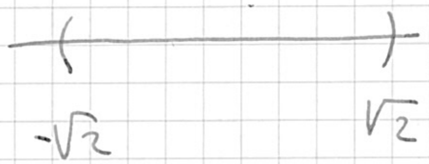
DEF: ~~*~~ NECHŤ $X, <$ JE LINEÁRNĚ USPOŘÁDANÁ MNOŽINA. NECHŤ $T \subset X$ SUPREMUM T JE NEJMENŠÍ HORNÍ MEZ T A INFIMUM JE NEJVĚTŠÍ DOLNÍ MEZ.

PŘÍKLADY: ~~a~~ 1) $A \subset \mathbb{Q}$ ... $\sup(A) = 1$

$\inf(A) = 0$

~~2)~~ $A \subset \mathbb{Q}$

$\sup(A), \inf(B)$ NEEXISTUJE



HORNÍ MEZ $A: \{x > 0, x \in \mathbb{Q} : x^2$

$A \subset \mathbb{R}$: $\sup(A) = \sqrt{2}$

$\inf(A) = -\sqrt{2}$

POZNÁMKA:

$\sup(T) = \min(\{x \in X : x$ JE HORNÍ MEZ $T\})$

$\inf(T) = \max(\{x \in X :$ JE DOLNÍ MEZ $T\})$

PŘÍKLAD 3: $X, < \ldots \mathbb{Q}$; $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 1\}$

- $\max A = 1$
- ~~MO~~ $\min A = 0$
- HORNÍ MEZE

$\{x \in \mathbb{Q} : x$ JE HORNÍ MEZ $A\}$

$= \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 1\}$

$\Rightarrow \downarrow$

$\min = 1$

$\Rightarrow \sup(A) = 1$

ZAVEDENÍ REÁLNÝCH ČÍSEL $\mathbb{R}$ (NENÍ POTŘEBA SE UČIT)

DEFINICE: DEDEKINDŮV ŘEZ JE MNOŽINA $A \subset \mathbb{R}$, TAKOVÁ ŽE:

- A JE OMEZENÁ SHORA ... EXISTUJE ALESPOŇ JEDNA HORNÍ MEZ
- $\forall a \in A \ \forall b \in \mathbb{Q} : b < a \Rightarrow b \in A$
- A NEMÁ MAXIMUM $\forall a \in A \ \exists b \in A : a < b$

– NA MNOŽINĚ DEDEKINDOVO ŘEZŮ SE ZAVEDOU:

- OPERACE $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$

$A + B \Leftrightarrow \{a \in A, b \in B : a + b\}$

$AB \Leftrightarrow$ .... OPERACE MAJÍ OBVYKLÉ VLASTNOSTI.

- DEFINUJEME

$\mathbb{R} = \{A \subset \mathbb{Q} : A$ JE DEDEKINDŮV ŘEZ$\}$

– KAŽDÁ NEPRÁZDNÁ SHORA OMEZENÁ PODMN. $\mathbb{R}$ MÁ SUPREMUM