$a_n \to a \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: |a_n - a| <$

<u>VĚTA:</u> JE-LI $(a_n)_{n\geq 1}$ NEKLESAJÍCÍ A SHORA OMEZENÁ PAK EXISTUJE $\lim_{n\to\infty} a_n$ A ~~LIM~~

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$$

<u>DŮKAZ:</u> $s := \sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$. BUĎ DÁNO $\varepsilon > 0$

PAK: • $a_n \leq s$ PRO VŠECHNY $n \in \mathbb{N}$

• $\exists m \in \mathbb{N}: a_m > s - \varepsilon$

PRO KAŽDÉ $n \geq m$ PLATÍ $s - \varepsilon < a_m < a_n \leq s$

$$0 \leq |a_n - s| = s - a_n < \varepsilon$$

<u>PŘÍKLAD:</u> $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

- DOKÁZAT RŮST - BERNOULLIHO NEROVNOST
- DOKÁZAT OMEZENOST

<u>BINOMICKÁ VĚTA</u>

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n\cdot k(n-1)\ldots(n-}{k!\,n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)$$

$$= \ldots\ldots \leq 3$$

<u>VĚTA</u>: NECHŤ $(a_n)_{n\to\infty}$ A $(b_n)_{n\to\infty}$ JSOU KONVERGENTNÍ S LIMITAMI L A M.
POKUD EXISTUJE $n \in \mathbb{N}$, TAKOVÉ, ŽE PRO VŠECHNY $n \geq N$: $a_n \geq b_n$, PAK PLATÍ I $L \geq M$.

<u>DŮKAZ</u>: SPOREM

$L < M$

$\varepsilon = \frac{M-L}{2} > 0$ ... EXISTUJE $N_0 \in \mathbb{N}$, TAK

ŽE PLATÍ $\forall n \geq N_0 : |a_n - L| < \varepsilon \;\&\; |b_n - M| < \varepsilon$

PRO $n \geq \max(N_0, N)$

$$a_n = L + a_n - L \leq L + |a_n - L| < L + \varepsilon =$$

$$\underbrace{L + \varepsilon + M - M}_{-2\varepsilon} = M + \varepsilon - 2\varepsilon = M - \varepsilon =$$

$$M - b_n + b_n - \varepsilon < \varepsilon + b_n - \varepsilon = b_n$$

$$\Rightarrow a_n < b_n \; ↯$$

VĚTA: (O DVOU POLICAJTECH)

NECHŤ POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n \to \infty}$, $(b_n)_{n \to \infty}$, $(c_n)_{n \to \infty}$ SPLŇUJÍ:

- $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = L$

- $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : a_n < c_n < b_n$

PAK JE I c_n KONVERGENTNÍ, LIMITA EXISTUJE

$\lim\limits_{c \to \infty} c_n = L$

$|a_n - L| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

DŮKAZ:

NECHŤ $\varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : b_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

PRO $n > \max(N_0, N_1, N_2)$ LEŽÍ V INTERVALU

$c_n \in \langle a_n, b_n \rangle \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \ldots |c_n - L| < \varepsilon$

VĚTA: NECHŤ $(a_n)_{n\to\infty}$ A $(b_n)_{n\to\infty}$ JSOU KONV.
POSL. S LIMITAMI. PAK

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A+B$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=AB$

3) ~~PRO~~ $B\neq 0$, $b_n\neq 0$ PRO $\forall n\in\mathbb{N}$
PAK $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}$

DŮKAZ: 1) NECHŤ $\varepsilon>0$, PAK EXISTUJE ~~$N_1\in\mathbb{N}\ \forall n\ge$~~
$N\in\mathbb{N}: \forall n\ge N: |a_n-A|<\varepsilon\ \&\ |b_n-B|<$

PRO
$$|(a_n+b_n)-(A+B)|=|(a_n-A)+(b_n-B)|$$
$$\le|a_n-A|+|b_n-B|<2\varepsilon$$

2) OBDOBNĚ
$$|a_nb_n-AB|=|a_nb_n+Ab_n-Ab_n-AB|$$
$$=|(a_n-A)\cdot b_n+A(b_n-B)|$$
$$\le|a_n-A|\cdot|b_n|+|A||b_n-B|$$
$$\le\varepsilon|b_n|+|A|\varepsilon\le\varepsilon|b_n-B+B|+|A|\cdot\varepsilon$$
$$\le\varepsilon(|b_n-B|+|B|)+\varepsilon|A|$$

$$\leq \varepsilon^2 + \varepsilon(|B| + |A|) \leq \varepsilon(|B| + |A| + 1)$$

$\varepsilon < 1$

BEZ. UJ. ŠKA. O.

3) STEJNĚ JAKO ②

PŘÍKLAD:

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+3}{n^2+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

VĚTA: POSLOUPNOST $(a_n)_{n\to\infty}$ BUDIŽ OMEZENÁ, A POSLOUPNOST $(b_n)_{n\to\infty} \to 0$ PAK $(a_n \cdot b_n)_{n\to 0} \to 0$

DŮKAZ: $|a_n| \leq A$ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$

$$\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall_n \geq N : |b_n| < \varepsilon$$

PAK PRO $n \geq N$: $|a_n \cdot b_n - 0| \leq A\varepsilon$

$\square$

TEORIE POSLOUPNOSTÍ

PODPOSLOUPNOSTI

DEF: NECHŤ $(a_1, a_2, \ldots)$ JE POSLOUPNOST, PAK $(b_1, b_2, \ldots)$ NAZVEME PODPOSLOUPNOST $(a_n)_{n\to\infty}$ PRÁVĚ KDYŽ EXISTUJE ROSTOUCÍ ZOBRAZENÍ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(m < n \Rightarrow f(m) < f(n))$

$\cancel{a}$ $b_n = a_{f(n)}$

NEBO

$$n_1 < n_2 < n_3 \ldots$$

$$\wedge\ b_1 = a_{n_1},\ b_2 = a_{n_2}, \ldots$$

PŘÍKLAD: $(2, 3, 5, 7, \ldots)$ JE PODPOSLOUPNOST $\mathbb{N}$