POVÍDÁNÍ O ČÍSLECH

PŘIROZENÉ ČÍSLA $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \}$ $+$ $*$

CELÁ ČÍSLA $\mathbb{Z} = \{\ldots; -1; 0; 1; \ldots\}$ $+ - *$

RACIONÁLNÍ $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

REÁLNÁ ČÍSLA $\mathbb{R} = \{?\}$ AXIOMATICKY / DEDEKINDOVY ŘEZY

DŮKAZ: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ SPOREM

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

- BÚNO: (BEZ ÚJMY NA OBECNOSTI)
  - $p, q \in \mathbb{N}$
  - $q \neq 1$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\boxed{p, q \text{ JSOU NESOUDĚLNÁ}}$

$2q^2 = p^2$

2 DĚLÍ p^2 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{2 DĚLÍ } p}$ $\Rightarrow p = 2 \cdot k$

$2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow$ $\boxed{\text{2 DĚLÍ } q}$

P.CV.

$n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ \sqrt{n} \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

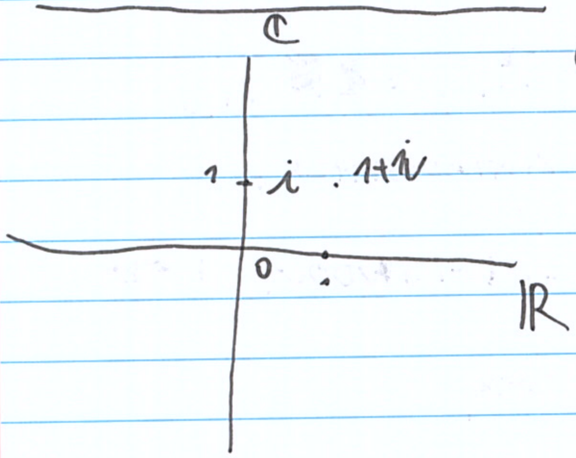
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset$

$-$ $\quad$ $/$ $\quad$ $\sqrt{x}$

$x>0$

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

$\mathbb{C} = \{a+bi;\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2=-1\}$



GAUSOVA KOMPLEXNÍ ROVINA

$\sqrt{-1} = i$

GEOMETRICKY: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

ALGEBRAICKY NE:

$+,\ -,\ *$

$(a+ib) \pm (c+id) = (a \pm c) \pm i(b \pm d)$

$(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$

~~Zdta~~

$z = a+ib \qquad z \in \mathbb{C}$

$\bar{z} = \overline{(a+ib)} = a-ib$ - KOMPLEXNĚ ZDRUŽENÉ

$\boxed{z+\bar{z} \in \mathbb{R}}$ $\qquad$ $\boxed{z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}}$

$z+\bar{z} = a+ib + a-ib = 2a \in \mathbb{R}$

$z \cdot \bar{z} = |a+ib| = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{z \cdot \bar{z} = |z|^2}$

DĚLENÍ ① 25/9/14 3

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{1}{c^2+d^2} \cdot$$

$$\left((BC+BD)+(BC-AD)i\right)$$

$\sqrt{4} = 2$ | $x^2 = 4$

$x = \pm 2$

JEDNA (HLAVNÍ) ODMOCNINA | „VŠECHNY" ODMOCNINY

$\sqrt{-1} = i$ | $x^2 = -1$

$x = \pm i$

ODMOCNINY ZE ZÁPORNÝCH ČÍSEL

$a < 0;\ a \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{a} = \sqrt{-|a|} = \sqrt{(-1)|a|} = i\sqrt{|a|}$$

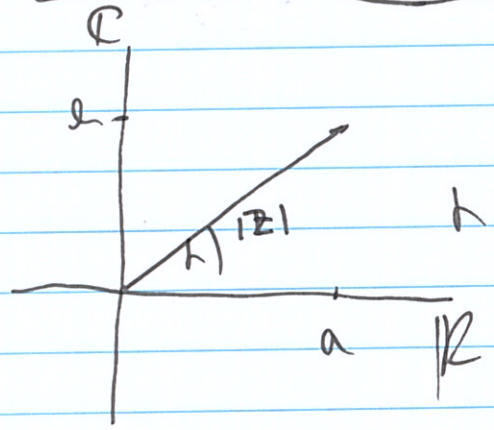
$x^2 = a \ \ldots \quad x = \pm i\sqrt{|a|}$

$ax^2 + bx + c$ $\quad D > 0:\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$D = 0:\ x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$

$D < 0:\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|b^2-4ac|}}{2a}$

GONIOMETRICKÝ TVAR $\mathbb{C}$



$z = a + ib$

$\alpha = ARG(z)$

$|z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi$

$$\boxed{z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

$z = a + ib = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$w = c + id = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$z \cdot w = |z||w|(\underbrace{\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha}_{\cos(\varphi+\alpha)} + i(\underbrace{\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi}_{\sin(\varphi+\alpha)}$

$$= \boxed{|z||w|(\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha))}$$

$z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

$$\boxed{z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – LEŽÍ NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

$|\cos\varphi + i\sin\varphi| =$

$= \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$

MOIVRE - VĚTA

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

PŘ: $\sqrt[12]{1+i} = ? \Rightarrow x^{12} = 1+i$

KOMPLEXNÍ ČÍSLA NEJDOU USPOŘÁDAT

DŮKAZ: SPOREM

$i > 0 \; / \cdot i > 0$	$i = 0$	$i < 0 \; / \cdot i < 0$
$-1 > 0$	$i^2 = 0 \neq -1$	$-1 > 0$
SPOR	SPOR	SPOR

~~PŘ:~~ **BINOMICKÁ RCE V $\mathbb{C}$**

$x^n = a \qquad a, x \in \mathbb{C};\ n \in \mathbb{N}$

VÍME $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ZNÁME $|a|, \varphi$

HLEDÁME $x = |x|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ HLEDÁME $|x|, \alpha$

$$|x|^n(\cos n\alpha + i\sin\alpha) = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$|x|^n = |a|$$

$$|x| = \sqrt[n]{|a|}$$

25/9/14 (6)

$\cos n\alpha + i\sin\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$n\alpha = \varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

PŘESKOČ

$\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{2} \quad k \in \{0; 1; \dots n$

$$\boxed{x = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \quad k = 0; 1; \dots n-1}$$

PŘÍKLAD

$x^3 = -8$

$|a| = 8$

$\arg a = \pi$

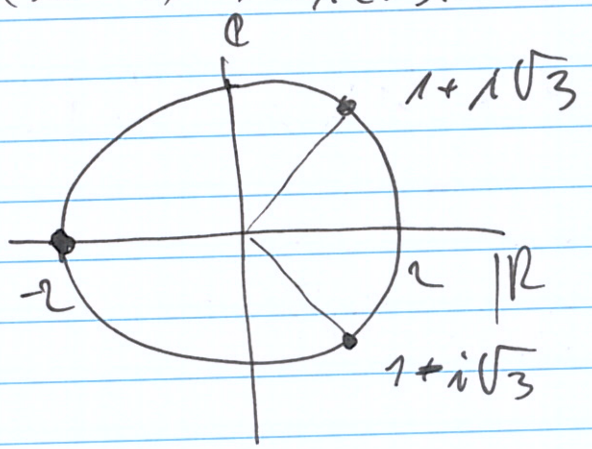
$x_{1,2,3} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \dots\right.\right.$

$\sqrt[3]{8} = 2$

$x_1: (k=0) \quad 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

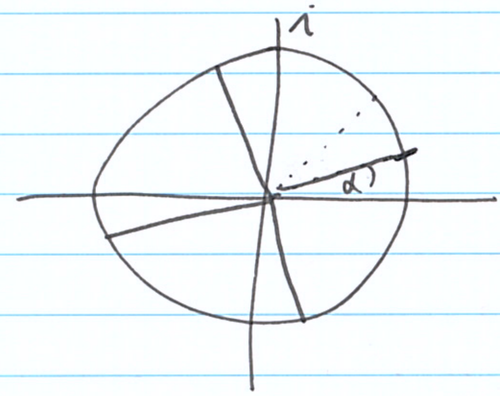
$x_2: (k=1) \quad 2(\cos\pi + \sin\pi) = 2$

$x_3: (k=2)$ KOMPL. SDRUŽENÝ KOŘEN $1 - i\dots$



PR $x^4 = i$

$\varphi_\alpha = \frac{\pi}{2}$



$\alpha = \frac{\varphi}{4} = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8}$

BONUS $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots =$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots =$$

$$= \cos x + \sin x$$

$$e^{ix} = \cos x + \sin x \Rightarrow$$

$$\underline{e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1}$$

25/9/14 (8)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

SEČTU: $\sin x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

ODEČTU: $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$